Ejemplos de Integrales inmediatas

Ejemplo 1 $\int 2x^3 \cdot dx$

f(x) = 2x^3 es una función definida en los reales y *2* ∈ *R* aplicamos la propiedad del producto de un escalar por un función que es igual al escalar por la integral de la función, es decir:

$$\int 2x^3 \cdot dx = 2 \cdot \int x^3 \cdot dx$$

Ahora calculamos la integral de una potencia

$$\int 2x^3 \cdot dx = 2 \cdot \int x^3 \cdot dx = 2\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + c$$

Al simplificar obtenemos:

$$\int 2x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{2} + c$$

Ejemplo 2 $\int (2x^3 + 4x)dx$

Aplicamos las propiedades de linealidad y obtenemos:

$$\int \left(2x^3 + 4x\right)dx = \int \left(2x^3\right)dx + \int \left(4x\right)dx = 2\int x^3 dx + 4\int xdx$$

Ahora se calculan las dos integrales con la fórmula de la potencia

$$\int \left(2x^3 + 4x\right)dx = 2\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + 4\frac{x^{1+1}}{1+1} = 2\left(\frac{x^4}{4}\right) + 4\frac{x^2}{2}$$

Simplificando esta expresión tenemos:

$$\int\left(2x^3+4x\right)dx=\frac{x^4}{2}+2x^2+C$$

Ejemplo 3 $\int 3\cdot\sqrt{x}\cdot dx$

Par resolver este ejercicio debes recordar una de las leyes de los exponentes $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, esto nos permite escribir la raíz como una potencia con lo que obtenemos:

$$\int 3\sqrt{x}dx=3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

Ahora se aplica la fórmula de la integral de potencia:

$$\int 3\sqrt{x}dx=3\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)=3\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)=2x^{\frac{3}{2}}$$

Y aplicando nuevamente la propiedad $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ se obtiene:

$$\int 3\sqrt{x}dx=2\sqrt{x^3}$$

Al simplificar finalmente se obtiene:

$$\int 3\sqrt{x}dx=2x\sqrt{x}+C$$

Ejemplo 4 $\int \frac{7}{\sqrt{x}}\cdot dx$

Aplicamos la primer propiedad de linealidad:

$$\int\frac{7}{\sqrt{x}}dx=7\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

Podemos reescribir la integral si aplicamos la ley de los exponentes

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\int \frac{7}{\sqrt{x}} dx = 7\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

Otra ley útil es, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ al aplicarla obtenemos:

$$\int \frac{7}{\sqrt{x}} dx = 7\int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

Al aplicar la fórmula de integración de una potencia

Y aplicando nuevamente la propiedad $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ se obtiene:

$$\int \frac{7}{\sqrt{x}} dx = 14\sqrt{x} + C$$

Ejemplo 5 $\int \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} dx$

Ejecutando la división de polinomios por factorización y simplificando la expresión obtenemos:

$$\int \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} dx = \int \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{2x - 3} dx = \int (2x + 3) dx$$

Aplicando las propiedades de linealidad:

$$\int \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} dx = 2\int x dx + 3\int dx$$

Integramos usando la fórmula de la potencia

$$\int \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} dx = 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + 3x = 2\frac{x^2}{2} + 3x$$

Finalmente simplificamos:

$$\int \frac{4x^2-9}{2x-3}dx = x^2+3x+C$$

Ejemplo 6 $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$

Utilizamos la identidad trigonométrica $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ se despeja $\sin^2 x$ y se sustituye en el numerador del integrando:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$$

Se factoriza la diferencia de cuadrados del numerador del integrando

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}dx$$

Y simplificando se obtiene:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx = \int (1+\cos x)dx$$

Aplicando las propiedades de linealidad

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx = \int dx + \int \cos x dx$$

Al aplicar las fórmulas de integración de una constante y del coseno se obtiene:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx = x+\sin x+C$$

Ejemplo 7 $\int\left(3e^{x}-\frac{1}{2}\left(2^{x}\right)\right)dx$

Aplicamos las propiedades de linealidad:

$$\int\left(3e^{x}-\frac{1}{2}\left(2^{x}\right)\right)dx=3\int e^{x}dx-\frac{1}{2}\int 2^{x}\,dx$$

Observa las integrales inmediatas, y aplicamos las fórmulas de integración de las exponenciales

$$\int\left(3e^{x}-\frac{1}{2}\left(2^{x}\right)\right)dx=3e^{x}-\frac{1}{2}\frac{2^{x}}{\ln(2)}$$

Y finalmente simplificamos mediante la propiedad $\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$

$$\int\left(3e^{x}-\frac{1}{2}\left(2^{x}\right)\right)dx=3e^{x}-\frac{2^{x-1}}{\ln(2)}+C$$

Ejemplo 8 $\int\frac{2dx}{\sqrt{25-25x^{2}}}$

Factoricemos el radicando

$$\int\frac{2dx}{\sqrt{25-25x^{2}}}dx=\int\frac{2dx}{\sqrt{25\left(1-x^{2}\right)}}$$

Aplicamos la propiedad $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$$\int\frac{2dx}{\sqrt{25-25x^{2}}}dx=\int\frac{2dx}{\sqrt{25}\sqrt{1-x^{2}}}=\int\frac{2dx}{5\sqrt{1-x^{2}}}$$

Ahora podemos aplicar la primera propiedad de linealidad

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{25-25x^2}}dx = \frac{2}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Se aplica la fórmula de integración $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin(x)$

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{25-25x^2}}dx = \frac{2}{5}arc\sin(x)+C$$